



Сириус

Международный математический центр

Оптимизация распределённого управления в нестационарных квазилинейных системах

Толстых Виктор Константинович

<https://tolstykh.com>

Донецкий государственный университет

Утверждения

Все задач оптимизации — обратные.

По требованиям к состоянию системы (целевой функционал J) мы находим параметры, коэффициенты системы u .

В общем случае для практического решения целесообразно применять **прямой экстремальный подход**.

Здесь целевой функционал минимизируется непосредственно на основе его градиента ∇J .

(Толстых В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем. М.: Наука. 2025. (рукопись на сайте))

Регуляризация решения u обратной задачи оптимизации осуществляется **градиентными алгоритмами**

(Толстых В.К. ЖВМиМФ, 1986)

2. Пространственно-распределённое управление

Необходимо найти оптимальное управление

$$u_*(x) = \arg \min J(u), \quad u(x) \in L_2(S), S = (x_a, x_b),$$

Целевой функционал

$$J(u) = \int_{\omega} I(v, u; x, t) dx dt, \quad \omega \subset \Omega = (x_a, x_b) \times (t_0, t_1),$$

$v(x, t) \in L_2^m(\Omega)$ — вектор-функция нестационарного состояния квазилинейной гиперболической системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + F = 0, \quad \text{на } \Omega \quad + \Gamma_{\text{рНУ}}. \quad (1)$$

Управление может присутствовать в матрице $A(v, u)$ или в свободном члене $F(v, u)$.

3. Бесконечномерная оптимизация

Прямой экстремальный подход:

$J \rightarrow \min(\text{ или } \max)$ экстремальными алгоритмами:

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) - b^k \alpha^k(x) \nabla J(u^k; x), \quad \text{равномерно на } S \quad (2)$$

$\alpha^k(x)$ — параметр регулирования сходимости в методах с регулируемым направлением спуска (МРНС) для поточечной равномерной сходимости $|u^k(x) - u_*(x)| \rightarrow 0 \forall x$.

$\alpha^k(x) = 1$ — градиентные методы с интегральной ср.кв. сходимостью $\|u^k - u_*\|_{L_2(S)} \rightarrow 0$, здесь равномерная сходимость $\forall x$ не контролируется — **проблема!**

В конечномерных пространствах всё хорошо: всегда покомпонентная сходимость: $\|u_* - u^k\|_{E^n} \iff |u_{*i} - u_i^k| \forall i$.

4. Производная Фреше, Градиент

Градиент определяется варьированием функционала и дифференциальных уравнений системы на Ω . Первая вариация :

$$\delta J = \langle J'_u, \delta u \rangle_{L_2(S)},$$

где J'_u — производная Фреше, $J'_u \neq \nabla J$, хотя имеет место необходимое условие оптимальности:

$$J'_u(u_*; x) = 0, \quad x \in S.$$

Как найти корень u_* этого *нелинейного бесконечномерного уравнения*? Ответ: **никак**. Необходимо из J'_u получить ∇J и применить экстремальные алгоритмы.

$J'_u = \nabla J$ при выполнении **условий управляемости**.

5. Область определения управления

Типичная **проблема** — управление задано на S внутри пространственно-временной области Ω функционирования системы, но не определено на всей Ω .

Управление должно быть определено на Ω ! Для $u(x)$

$$S = P_x(\Omega),$$

т.е. определяем u на Ω и делаем проекцию на ось x .

Оператор проецирования P_x , например:

- традиционное интегрирование по времени на Ω ;
- проецирование на x в момент $t_g \in (t_0, t_1)$.

1. $u \stackrel{def}{=} u(x, t)$, которое не изменяется со временем;
2. $u \stackrel{def}{=} u(x, t) = u(x, t_g) \forall t$, регулироваться в момент t_g .

Имеем два оператора проецирования $P_{x, \bar{t}}, P_{x, t_g}$.

6. Две вариации и два градиента

Вариация δJ относительно $\delta u \in L_2(\Omega)$:

1. $\delta J = \int_{x_a}^{x_b} \int_{t_0}^{t_1} \Phi \delta u \, dx dt, \quad J'_u(u; x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi \, dt \text{ на } S;$
2. $\delta J = \int_{x_a}^{x_b} (\Phi \delta u)|_{t_g} \, dx, \quad J'_u(u; x) = \Phi|_{t_g} \text{ на } S,$

где Φ — результат варьирования J и уравнений системы. Значение Φ находится через решение $f(x, t) \in L_2^m(\Omega)$ сопряжённой задачи:

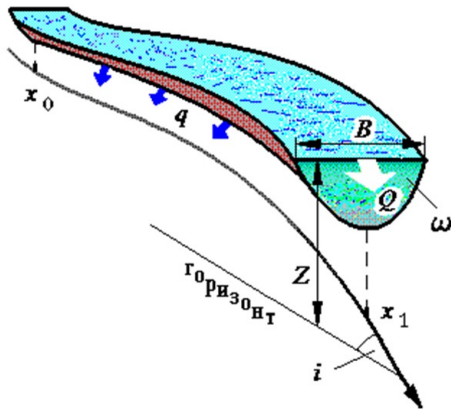
$$\frac{\partial f}{\partial t} + A^T \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{F}^* f = 0, \quad \text{на } \Omega \quad + \text{ГрНУ}. \quad (3)$$

С учётом **условий управляемости** получаем градиенты:

1. $J'_u = P_{x, \bar{t}}(\Phi) = \nabla J;$
 2. $J'_u = P_{x, t_g}(\Phi) = \nabla J.$
- (4)

7. Пример 1

Обратная задача идентификации шероховатости русла



Течение воды описывается квазиодномерной квазилинейной гиперболической системой Сен-Венана, где $v = (Q, Z)$, $Q(x, t)$ — расход воды, $Z(x, t)$ — уровень воды.

8. Управление. Функционал

Матрица $A(v) = \begin{pmatrix} 2w & B(c^2 - w^2) \\ 1/B & 0 \end{pmatrix},$

$F(v, u) = (F_{fr} - w^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}|_Z, \quad 0),$ характеристики $\frac{d\xi_{1,2}}{dt} = w \pm c,$
 $c = \sqrt{g\sigma/B}$ — скорость малых возмущений.

Член трения

$$F_{fr} = \frac{gQ|Q|}{\sigma RC^2}, \quad C = \frac{1}{u(x)} R^{\frac{1}{6}},$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} I|_{\omega} dt, \quad I(v; t)|_{\omega=x_b \times (t_0, t_1)} = (Z(x_b, t) - Z_e(t))^2.$$

9. Сопряжённая задача. Градиент

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A^{\textcolor{red}{T}} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{F}^* f = 0, \quad \text{на } \Omega,$$

$$2wf_1 + \frac{1}{B}f_2 = 0, \quad \text{на } x_a,$$

$$B(c^2 - w^2)f_1 + \textcolor{red}{I}'_Z|_{\omega}, \quad I'_Z|_{\omega} = 2(Z - Z_e), \quad \text{на } x_b,$$

$$f = 0, \quad \text{начальное условие на } t_1.$$

Здесь $\mathbb{F}^* = \begin{pmatrix} \frac{2F_{fr}}{Q} & \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x} \\ -F_{fr} \left(\frac{B}{\sigma} + \frac{4}{3R} \frac{\partial R}{\partial Z} \right) + w^2 \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_Z - g \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_Z & \frac{1}{B^2} \left(q - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{\partial B}{\partial Z} \end{pmatrix}$

Градиенты:

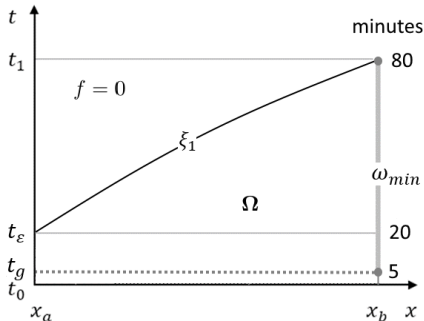
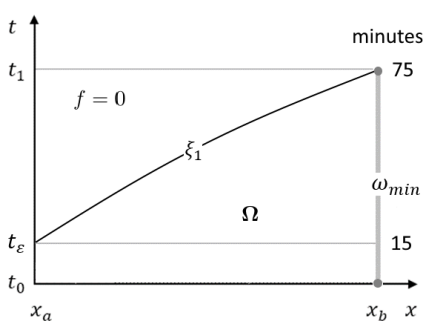
$$1. \nabla J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2F_{fr}}{u} f_1 dt;$$

$$2. \nabla J = \frac{2F_{fr}}{u} f_1 \Big|_{t_g}.$$

10. Управляемость

Условие управляемости (идентифицируемости):

$$t_1 = t_0 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c} + t_\varepsilon.$$



Здесь $\Omega \subset \Omega$ — область управляемости.

11. Постановка теста

Участок Северо-Крымского канала длиной $[x_a, x_b] = 20$ км, трапецидальное поперечное сечение, $Z_{x_a} - Z_{\text{дно}} = 3.6$ м, $Q_{x_b} = 107$ м³/с. Время прохода характеристики ξ_1 60 мин. Тестовое "оптимальное" управление:

$$u_*(x) = 0.025 + 0.0075 \left(\cos \pi + 2\pi \frac{x}{x_b - x_a} \right).$$

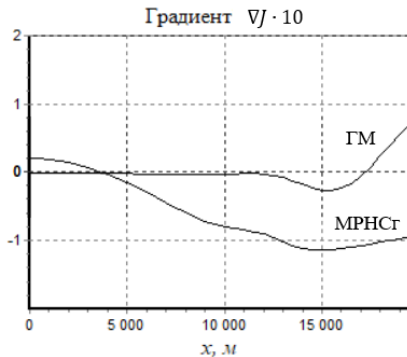
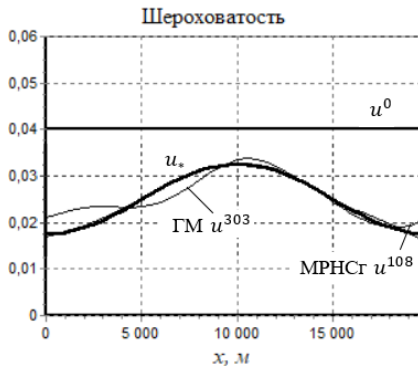
Рассчитывалось состояние потока v , полученный уровень $Z(x_b, t)$ считался экспериментальным $Z_e(t)$. Задавалось $u^0(x) = 0.04$, решалась обратная задача. Точность идентификации: $\max_t |Z(x_b, t) - Z_e(t)| \leq 5$ мм.

Для минимизации J применялся МРНСг с параметром

$$\alpha(x) = \left| \frac{0.1u^0}{\nabla J(u^0; x)} \right|,$$

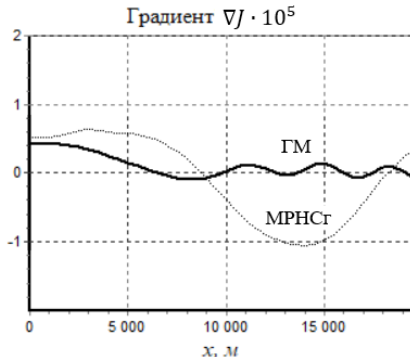
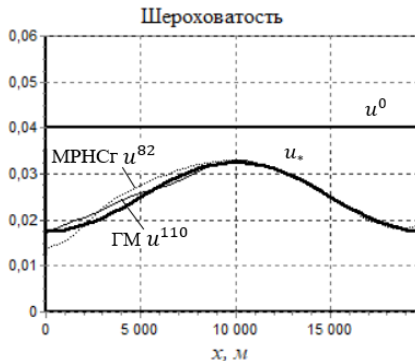
и ГМ наискорейшего спуска, где $\alpha = 1$.

12. Результаты идентификации. Интегральный градиент



Значение $\nabla J(u^{303}; x)$, полученное ГМ, близко к нулю в начале канала, что там замедлило сходимость к $u_*(x)$. Значение $\nabla J(u^{108}; x)$ в МРНСГ вдоль всего канала имеет значительный потенциал для смещения управления u^{108} к оптимуму. Наличие $\alpha(x)$ обеспечило МРНСГ быструю сходимость к $u_*(x) \forall x$.

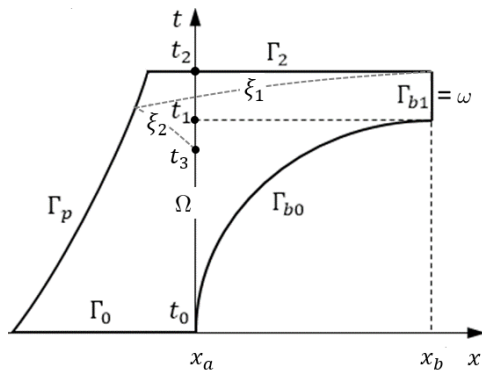
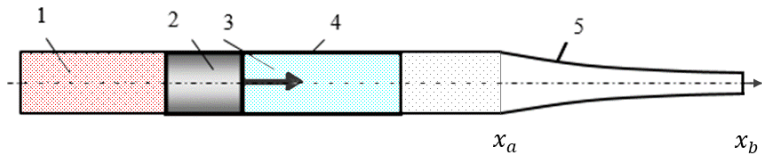
13. Результаты идентификации. Градиент на линии



С увеличением точности до $\Delta_{\max} Z \leq 1$ мм управление-шероховатость u^k визуально полностью совпадает с u_* . Градиент с проекцией на линию продемонстрировал более высокую и одинаковую на S чувствительность к управлению по сравнению с градиентом при интегральном проецировании.

14. Пример 2

Оптимизация формы сопла гидропушки



15. Управление. Функционал

Течение воды описывается квазиодномерной квазилинейной гиперболической системой, где $v = (\rho, w)$, плотность воды — $\rho(x, t)$, скорость воды — $w(x, t)$.

Матрица $A(v) = \begin{pmatrix} w & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & w \end{pmatrix}$, $F(v, u) = \begin{pmatrix} \rho w u \Theta(x - x_a) \\ 0 \end{pmatrix}$,

характеристики $\frac{d\xi_{1,2}}{dt} = w \pm c$, $c^2 = \frac{Bn\rho^{n-1}}{\rho_0^n}$ — квадрат скорости малых возмущений.

Управление

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d\sigma(x)}{dx}, \quad x \in S = (x_a, x_b),$$

$\sigma(x) = \sigma_a e^{\int_{x_a}^x u(\zeta) d\zeta}$ — площадь поперечного сечения сопла.

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} I|_{\omega} dt, \quad I(v, u; t)|_{\omega=\Gamma_{b1}} = \frac{\rho_0 \sigma(x_b) w^2(x_b, t)}{t_2 - t_1}.$$

16. Сопряжённая задача. Градиент

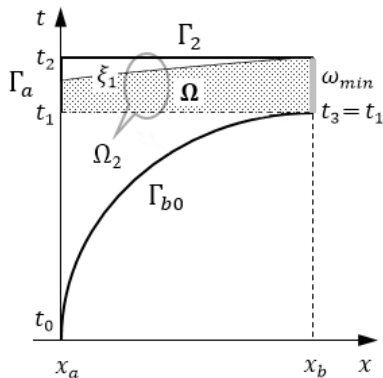
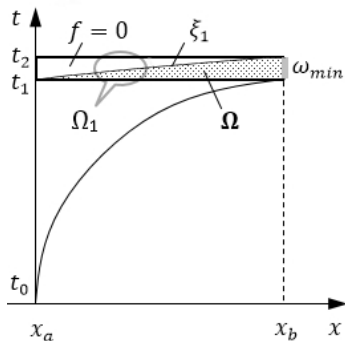
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + A^T \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{F}^* f &= 0, \quad \text{на } \Omega_2 = (x_a, x_b) \times (t_1, t_2), \\ f &= 0, \quad \text{на } \Gamma_a^* = x_a \times (t_1, t_2), \quad \text{на } \Gamma_2^* = [x_a, x_b] \times t_2, \\ \rho_0 f_1 + w_b f_2 + I'_w &= 0, \quad I'_w = \frac{2\rho_0 \sigma_b w_b}{t_2 - t_1}, \quad \text{на } \Gamma_{b1} = \omega,\end{aligned}$$

где матрица $\mathbb{F}^* = \begin{pmatrix} \frac{w}{u} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ \frac{\rho}{u} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$.

Градиенты:

1. $\nabla J = \int_{t_0}^{t_1} (\rho w f_1 + \kappa I|_\omega) dt;$
2. $\nabla J = \rho w f_1 + \kappa I|_\omega$ на линии при t_g .

17. Управляемость



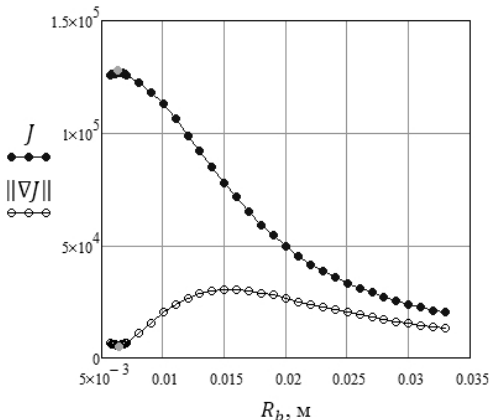
$\Omega \subset \Omega$ — область управляемости. Условие управляемости:

$$t_2 \geq t_1 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c}, \quad t_1 \geq t_3.$$

ξ_1 должна пройти через всё сопло, начало истечения t_1 не должно быть меньше t_3 начала попадания в сопло волн, отражённых от поршня.

18. Оценка выпуклости функционала

Длина сопла $x_b - x_a = 0.253$ м, масса поршня $m_p = 2.25$ кг, начальная скорость $w_0 = 76.2$ м/с, радиус ствола $R_a = 33 \cdot 10^{-3}$ м. Две пространственные сетки 100 шагов. Первая — подвижная для расчёта течения воды, вторая — неподвижная для сопла. Количество слоёв по времени доходило до 10^3 .
Оценка выпуклости функционала (на коническом сопле с $J(R_b)$):



19. Алгоритм оптимизации

Для максимизации $J(u)$ применить МРНСГ с $\alpha^k = \alpha^0$ невозможно, использовался ГМ с адаптивным выбором b^k :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Если } J^k > rJ^{k-1} \text{ тогда:} \\ \quad \bullet \text{ если } \|\nabla J^k\| < \|\nabla J^{k-1}\| \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, \\ \quad \text{иначе } b^k = \frac{\|\nabla J^{k-1}\|}{b_3 \|\nabla J^k\|} b^{k-1}; \\ \quad \bullet u^{k+1} = u^k + b^k \nabla J^k. \\ \text{Иначе повторять до } J^k > rJ^{k-1}: \\ \quad b^{k-1} \leftarrow b_2 b^{k-1}, u^{k+1} = u^{k-1} + b^{k-1} \nabla J^{k-1}, \\ \quad \text{если } b^{k-1} \approx 0 \text{ тогда стоп итерации } k. \end{array} \right.$$

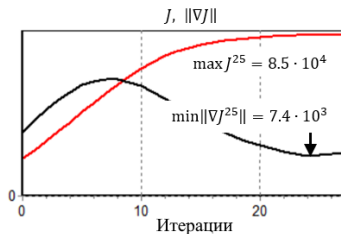
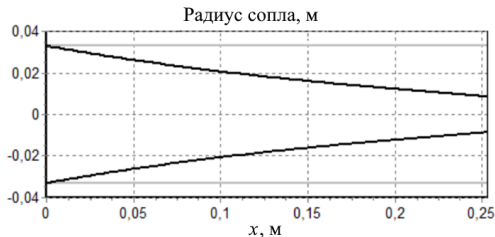
Начальное приближение сопло-труба:

$$u^0(x) = 0,$$

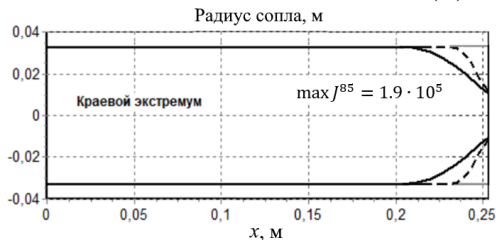
20. Результаты оптимизации. Интегральный градиент

$$J(u^0) = 2.0 \cdot 10^4, \quad \|\nabla J(u^0)\| = 1.1 \cdot 10^4.$$

Первый локальный максимум:



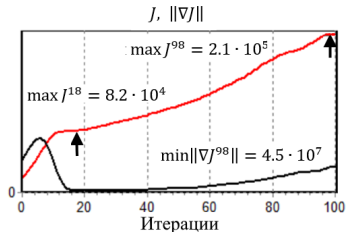
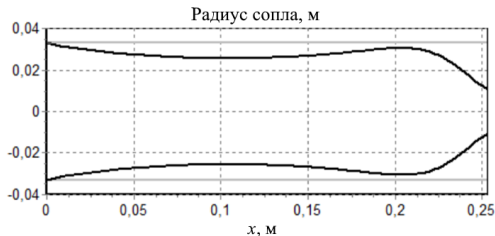
Второй краевой "локальный максимум"?, $u(x) \leq 0 \forall x \in S$:



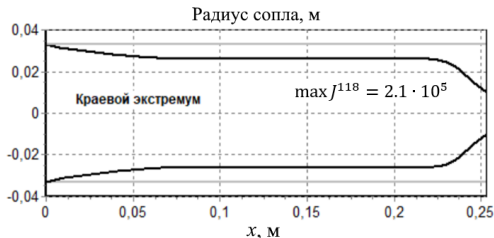
21. Результаты оптимизации. Градиент на линии

$$J(u^0) = 2.0 \cdot 10^4, \quad \|\nabla J(u^0)\| = 5.7 \cdot 10^7.$$

Второй локальный максимум:



Третий краевой локальный максимум, $u(x) \leq 0 \forall x \in S$:



Выводы

Рассмотренные примеры оптимизации нестационарных квазилинейных систем с разными операторами P_x показали, что новая форма градиента с проецированием на линию в области управляемости Ω обладает наилучшей чувствительностью к изменениям управления $u(x)$ на S . При этом реализуется лучшее приближение к оптимуму за меньшее число итераций, что позволило впервые найти три локально оптимальных формы сопла гидропушки.

Толстых Виктор Константинович

URL <https://tolstykh.com>

1. Толстых В.К. О градиенте в задачах оптимизации нестационарных систем с распределенным управлением // Вычислительные методы и программирование. 2025. Т. 26. № 3. С. 229-244.
2. Толстых В.К. Об управляемости систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 2024, Т. 64, № 6, с. 959–972.
3. Толстых В.К. Алгоритмы оптимизации систем с многоэкстремальными функционалами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 2024. Т. 64. № 3, с. 415–423.
4. Толстых В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем. М.: Наука. 2025. (рукопись на сайте)